

Modellezési feladatok

- (1) Egy cég asztalokat és székeket készít. Egy asztalhoz 1 óra munka és 9 m^2 deszkalap szükséges, egy székhez pedig 1 óra munka és 5 m^2 deszkalap. Jelenleg 6 óra munka és 45 m^2 deszkalap áll rendelkezésre. Egy asztalon a nyereség 8 \$, egy széken 5 \$. Adjuk meg a feladat modelljét, ha célunk a nyereség maximalizálása!

Megoldás: A matematikai modellezési folyamat során alapvetően mindig három fő lépést fogunk követni. Az **első a döntési változók meghatározása**, ezek lesznek azok a kifejezések a feladatban, melyekre a döntési helyzetünk vonatkozik, melyet mi választhatunk meg, a modell további részében az ezekre vonatkozó információkat használjuk fel. Nagyon fontos a modellezési folyamat elején rövid szöveges magyarázatot adni, hogyan választottuk meg a változókat. Jelen esetben egy termelésprogramozási feladatot kell megoldanunk, ahol kézenfekvőnek látszik a gyártott mennyiségeket döntési változónak választani, hiszen ezeket mi választhatjuk meg, és ettől a választástól nyilván függ majd a felhasznált erőforrás-mennyiség és a nyereség is. Tehát jelölje x_1 és x_2 az asztalokból illetve székekből gyártott mennyiségeket. A változók értelmezése után meg kell adnunk azt is, hogy mi a változók értelmezési tartománya, mik lesznek az induló feltételek. A gyártott mennyiség természetesen nem lehet negatív, továbbá itt, mivel a feladat kijelöli, hogy gyártott darabszámban kell gondolkodnunk, a változók csak egész értékeket vehetnek fel (ha a feladat megoldásában nem csak egész megoldások fordulhatnak elő, akkor folytonos változókkal kellene dolgoznunk).

A modellezés második lépése, hogy megfogalmazzuk a **korlátozó feltételeket**. Itt a korlátokat az fogja kijelölni, hogy az erőforrások nem állnak tetszőleges mennyiségben rendelkezésünkre. Tehát fel kell írunk a döntési változók segítségével, hogy összesen mennyi erőforrást használunk fel. Ehhez tekintsük az alábbi ún. technológiai mátrixot, ahol az oszlopok a termékeknek, a sorok az erőforrásoknak felelnek meg:

	asztal	szék
munkaóra	1	1
deszkalap	9	5

Egy termelésprogramozási feladatban a technológiai mátrix felvételekor fontos megjegyezni, hogy a mátrix adatai mindig egységnyi felhasználásra vonatkoznak, tehát az első sorban lévő adatok mértékegysége munkaóra/darab, a második sorban lévő adatok mértékegysége pedig m^2/darab . A feltételek felírásához abból kell kiindulnunk, hogy az erőforrások felhasználása lineáris, tehát kétszer annyi termék gyártásához kétszer annyi erőforrást kell felhasználnunk (ha 1 asztal gyártásához 1 munkaóra szükséges, akkor 2 asztalhoz 2 munkaóra, és így tovább). Az x_1 változóval jelöltük azt, hogy hány darab asztalt fogunk gyártani, akkor az ehhez szükséges munkaóra úgy adódik, hogy a fajlagos munkaóra felhasználást megszorozzuk a

gyártott mennyiséggel, azaz $1 \cdot x_1$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy székek gyártására összesen $1 \cdot x_2$ munkaórát fordítunk. A felhasznált munkaóra nem lehet több mint 6, tehát a munkaóra feltétel az $x_1 + x_2 \leq 6$ alakban fogalmazható meg (a mértékegységek egyeztetésekor látszik, hogy itt a bal oldalon munkaóra/darab \cdot darab áll, tehát az egyenlőtlenség mindkét oldalán munkaórát kapunk).

A nyersanyagra vonatkozó feltétel felírásakor is a linearitási tulajdonságot használjuk ki, ha 1 asztal gyártásához 9 m^2 deszkalap szükséges, akkor 2 asztalhoz 18 m^2 , és így tovább, tehát x_1 darab asztal gyártásához összesen $9x_1 \text{ m}^2$ deszkalapot használunk fel, valamint hasonló gondolatmenettel x_2 darab szék gyártásához összesen $5x_2 \text{ m}^2$ deszkalapot használunk fel. A korlát alapján azt kapjuk, hogy a felhasznált nyersanyag nem lehet több mint 45 m^2 , amit a $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ alakban írhatunk fel (a mértékegységek egyeztetésekor látszik, hogy itt a bal oldalon $\text{m}^2/\text{darab} \cdot \text{darab}$ áll, tehát az egyenlőtlenség mindkét oldalán m^2 -t kapunk).

A modellezés befejező, **harmadik lépése, hogy megfogalmazzuk a célunkat**, mi az, amire törekszünk a feladatban. Itt a célunk, hogy optimalizáljuk a gyártás során elérhető nyereséget. A nyereség is lineárisan függ a változóktól, hiszen ha egy asztalon a nyereség 8 dollár, akkor két asztalon 16 dollár, és így tovább, tehát x_1 darab asztal gyártásakor a nyereség $8x_1$ dollár, x_2 darab szék gyártásakor pedig $5x_2$ dollár. Tehát a célfüggvényünk $8x_1 + 5x_2$, melynek a fenti feltételek melletti maximumát szeretnénk megtalálni. Az ilyen típusú feladatokat lineáris programozási feladatnak nevezzük. Összefoglalva a feladat matematikai modellje:

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$z = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

- (2) Egy cég kétféle fából készült játékot gyárt: katonákat és vonatokat. Egy katonát 27 dollárért lehet eladni, és előállításához 10 dollár értékű nyersanyag szükséges. Minden legyártott katonára 14 dollárral növeli a cég bérben jelentkező változó költségét és az általános költséget. Egy vonat 21 dollárért adható el, előállításához 9 dollár értékű nyersanyag szükséges. Minden legyártott vonat 10 dollárral növeli a költségeket. A játékok gyártása kétféle munkát igényel, fafaragó és felületkezelő munkát. Egy katonára előállításához 2 óra felületkezelő munka és 1 óra fafaragó munka szükséges, egy vonathoz 1 óra felületkezelő és 1 óra fafaragó munka kell. A nyersanyag minden héten korlátlanul áll rendelkezésre, de csak 100 felületkezelő munkaóra és 80 fafaragó munkaóra használható fel. A vonatok iránti kereslet korlátlan, katonákból azonban legfeljebb csak negyvenet vesznek meg hetente. Adjuk meg a feladat modelljét, ha célunk a cég heti profitjának maximalizálása!

Megoldás: A döntési változók itt is a gyártott mennyiségek lesznek, jelölje x_1 a hetente gyártott katonák, x_2 pedig a hetente gyártott vonatok számát. A feladat matematikai modellje:

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 40$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

A modell felvétele során abból indulunk ki, hogy mindkét terméket darabszámban gyártjuk, ezért mindkét változó csak nemnegatív egész értékű lehet. A linearitási tulajdonságot felhasználva kapjuk a felületkezelő illetve a fafaragó munkaóra vonatkozó feltételeket. A harmadik feltétel egy konkrét keresleti információból származik, az adott termékből gyártott mennyiség nem lépheti túl a maximális keresletet. A célfüggvény felírásakor eljárhatunk úgy, hogy megnézzük, hogy egy katona gyártásakor a 27 dolláros eladási árhoz mekkora költség tartozik, és ezt levonjuk a bevételből. Egy katona gyártása 10 dollár nyersanyagköltséget és 14 dollár változó költséget jelent a cég számára, tehát ha ezekkel csökkentjük a bevételt, darabonként 3 dollár nyereséget kapunk. Tehát a katonák gyártása során keletkező nyereség a célfüggvény linearitása alapján az egységnyi nyereség és a gyártott mennyiség szorzata. Hasonlóan eljárva a vonatok esetén azt kapjuk, hogy a 21 dolláros darabonkénti bevételt 9, valamint további 10 dollárral kell csökkentenünk. Így a vonatok esetén a profit minden gyártott darabra 2 dollár, tehát az össznyereség az egységnyi 2 dollár és a gyártott mennyiség szorzata.

- (3) Egy bútorkészítő cég íróasztalokat, asztalokat és székeket gyárt. Mindegyik bútortípus gyártásához faanyag és kétféle szakmunka szükséges, asztalosmunka és felületkezelés. Az egyes bútortípusok előállításához a különböző erőforrásokból szükséges mennyiséget az alábbi táblázat adja meg:

Erőforrás	Íróasztal	Asztal	Szék
Faanyag (egység)	8	6	1
Felületkezelés (óra)	4	2	1.5
Asztalosmunka (óra)	2	1.5	0.5

Jelenleg 48 egység faanyag, 20 órányi felületkezelés és 8 órányi asztalosmunka kapacitás áll rendelkezésre. Egy íróasztal 60, egy asztal 30, egy szék pedig 20 dollárért adható el. Írjuk fel a modellt, ha a cég az összjövedelmét kívánja maximalizálni!

Megoldás: A modellben a döntési változók felvételekor jelölje x_1 a gyártandó íróasztalok, x_2 a gyártandó asztalok és x_3 a gyártandó székek számát. Ebből azonnal következik, hogy mindegyik változóra érvényes a nemnegativitási feltétel. A korlátozó feltételekben szerepelni fog

egyrészt egy nyersanyag feltétel, továbbá két munkaóra-felhasználáshoz kapcsolódó feltétel. Ezek mindegyike lineáris, kétszer annyi termék gyártásához kétszer annyi nyersanyagot és kétszer annyi munkaidőt kell felhasználni. A célfüggvény egy szintén lineáris bevételfüggvény lesz. Tehát a modell a következő lineáris programozási feladat:

$$\begin{aligned}x_1, x_2, x_3 &\geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \\8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 48 \\4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\leq 20 \\2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\leq 8 \\z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 &\rightarrow \max\end{aligned}$$

- (4) Egy bőripari cég öveket és cipőket gyárt. Egy öv elkészítéséhez 2 egységnyi bőrre és 1 óra szakmunkára van szükség. Egy pár cipő elkészítéséhez 3 egységnyi bőr és 2 óra szakmunka szükséges. Legfeljebb 25 egységnyi bőrt lehet beszerezni 5 dolláros egységáron, a szakmunka-kapacitás 15 óra, és a szakmunka költsége 10 dollár/óra. Egy öv eladási ára 23 dollár, egy pár cipőt 40 dollárért lehet értékesíteni. A cég maximalizálni akarja a nyereségét. Írjuk fel a feladat modelljét!

Megoldás: Jelölje x_1 az elkészített övek számát, x_2 pedig a gyártott pár cipők számát. Ekkor a korlátozó feltételekben a felhasznált nyersanyaghoz és munkaórához is tartozik egy-egy lineáris feltétel. A célfüggvényben figyelembe kell vennünk, hogy a célunk a nyereség maximalizálása, tehát az eladási árat le kell csökkentenünk a költségekkel. Az öv esetén a 23 dollárból le kell vonnunk a 2 egység bőr költségét, ami 10 dollár, valamint az 1 óra szakmunka költségét, ami további 10 dollár, így egy darab öv gyártásakor a nyereség 3 dollár. A cipő esetén a 40 dolláros eladási árból 15 dollár nyersanyagköltséget és 20 dollár munkaóraköltséget kell levonnunk, tehát egy pár cipő esetén a nyereség 5 dollár. A teljes nyereséget úgy kapjuk, hogy az egységnyi nyereséget szorozzuk a gyártott mennyiséggel. Tehát a feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned}x_1, x_2 &\geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \\2x_1 + 3x_2 &\leq 25 \\x_1 + 2x_2 &\leq 15 \\z = 3x_1 + 5x_2 &\rightarrow \max\end{aligned}$$

- (5) Egy cukrászda 3 típusú süteményt készíthet, melyekhez 3 fő alapanyagot használnak fel. A gyártott mennyiségeket darabszámban mérik. Az A mátrix a_{ij} eleme megadja, hogy az i -edik

alapanyagból a j -edik termék egy darabjában mekkora a felhasznált mennyiség.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Egy adott időszakban az egyes termékekhez az alapanyagokból felhasználható mennyiségek legfeljebb 900, 600 és 1050 egység. Az egyes termékek egységére eső hozamok rendre 20, 30 és 40 pénzegység.

- a) Írjuk fel a matematikai modellt, ha a cél a lehető legnagyobb hozam!
- b) Egészítsük ki a modellt a következő feltételekkel: a termékek gyártott össz mennyisége legalább 100, de legfeljebb 200 darab lehet, és mindegyik termékből legalább húsz darabot készíteni kell!
- c) Milyen termékösszetétel esetén lesz a b) feladatban a költségre eső hozam optimális, ha az önköltség darabonként rendre 80, 50 és 60 pénzegység, és felmerül még 120 pénzegység fix költség is? Írjuk fel a megfelelő új célfüggvényt!

Megoldás: A modellben x_1, x_2 és x_3 jelölje a termékekből gyártandó mennyiségeket. Ebből következően mindhárom változó nemnegatív, és mivel a feladat a mértékegységet darabszámokban jelöli ki, egészértékű változókkal kell dolgoznunk. A feladat matematikai modellje:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

$$3x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 900$$

$$3x_1 + 3x_3 \leq 600$$

$$6x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 1050$$

$$z = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 \rightarrow \max$$

A feltételek felírásakor ismét abból indulhatunk ki, hogy az alapanyagok felhasznált mennyisége lineáris függvénye a süteményekből gyártott darabszámoknak, kétszer annyi süteményhez kétszer annyi alapanyagot használunk fel. Tehát ahhoz, hogy felírjuk az első alapanyagból felhasznált összes mennyiséget, a mátrix első sorában szereplő értékeket, mint egységnyi felhasználásokat szorozzuk rendre a gyártott darabszámokkal és ezeket összeadjuk. Ez a mennyiség nem lépheti túl az előre megadott felhasználható mennyiséget. A többi alapanyag esetén ugyanígy járunk el a mátrix második illetve harmadik sorában szereplő adatok szerint. A célfüggvény egy profitfüggvény, amit a linearitási tulajdonság alapján kapunk, az egységnyi hozamokat a gyártott mennyiséggel szorozzuk, majd ezen értékeket összeadjuk.

A b) részben a feladat modelljét ki kell egészítenünk további feltételekkel. Az előírt korlátozások konkrétan a gyártandó mennyiségekre vonatkoznak, ezért csak magukat a döntési változókat kell felhasználnunk a feltételek felírásához:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$$

$$x_1 \geq 20$$

$$x_2 \geq 20$$

$$x_3 \geq 20$$

A c) feladatban a b) részben felírt feltételek mellett új célfüggvényre lesz szükségünk, hiszen nem csak az eredeti hozamokat kell figyelembe vennünk, hanem arra vagyunk kíváncsiak, hogy a gyártásra fordított költséghez képest mikor érjük el a lehető legjobb hozamot. A hozamot az a) részben megadott célfüggvény állítja elő most is, a költséget pedig a linearitási feltétel szerint hasonló gondolat alapján a $80x_1 + 50x_2 + 60x_3 + 120$ alakban írhatjuk. A 80, 50 és 60 pénzegység változó költség, az adatok alapján darabonként értelmezendő, tehát az így előálló összköltség függ a gyártott mennyiségektől, a 120 viszont fix költség a gyártás során, akárhány darabot állítunk is elő. Egy módszer arra, hogy a hozam maximalizálásának és a költség minimalizálásának szempontját egyszerre figyelembe tudjuk venni, az lehet, hogy az egységnyi költségre eső hozamot optimalizáljuk, azaz a hozam és a költség arányát. Tehát az új célfüggvényünk:

$$z = \frac{20x_1 + 30x_2 + 40x_3}{80x_1 + 50x_2 + 60x_3 + 120} \rightarrow \max$$

Az ilyen jellegű feladatot hiperbolikus programozási feladatnak is szokás nevezni.

- (6) Egy gazdaságban az állatok etetésére négyféle takarmánykeveréket használhatnak, amelyeket három tápanyagból készítenek. Az egyes keverékek a tápanyagokból az alábbi mennyiségeket tartalmaznak a megfelelő egységekben:

	1. keverék	2. keverék	3. keverék	4. keverék
A tápanyag	2	1	1	0
B tápanyag	1	2	0	2
C tápanyag	1	0	2	1

A tápanyagokból legalább 5, 4 illetve 10 egységnyit biztosítanunk kell az etetési program során. Az egyes keverékek beszerzési árai 5, 3, 4 illetve 1 pénzegység. Cél a minimális költségű takarmányozási program meghatározása. Adjuk meg a matematikai modellt!

Megoldás: A modell felvétele során a döntési változók jelentsék rendre azt, hogy az egyes takarmánykeverékeket milyen mennyiségben alkalmazzuk az etetés során. Ezek a változók nemnegatív folytonos változók lesznek. A feltételekben természetesen ebben az esetben is

érvényes a linearitási tulajdonság, hiszen kétszer annyi takarmánykeverék kétszer akkora mennyiségű tápanyagot tartalmaz. A célfüggvény szintén lineáris. Ez alapján a matematikai modell:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_4 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 \geq 10$$

$$z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

- (7) Van 1000 darab 7 méteres oszlopunk, melyekből 1.5 illetve 2.5 méteres darabokat kell vágunk. Legalább négyszer annyi 1.5 méteres oszlopra van szükségünk, mint 2.5 méteresre. Hogyan vágjuk fel az oszlopokat, hogy a keletkező hulladék minimális legyen? Adjuk meg a probléma matematikai modelljét!

Megoldás: Ebben a darabolási feladatban már nehezebb a modell felvétele. Először gondoljuk át, hogy a 7 méteres oszlop milyen módon darabolható fel. A lehetséges darabolások:

1. változat: 2 darab 2.5 méteres, 1 darab 1.5 méteres oszlop, 0.5 méter hulladék,
2. változat: 1 darab 2.5 méteres, 3 darab 1.5 méteres oszlop,
3. változat: 4 darab 1.5 méteres oszlop, 1 méter hulladék.

Így a probléma megfogalmazható olyan módon is, hogy azt kell eldöntenünk, melyik oszlopot melyik változat szerint vágjuk fel. Nyilván a konkrét oszlopnak nincs jelentősége, csak annak, hogy melyik változatot hányszor alkalmazzuk. Ezek alapján a döntési változókat úgy érdemes megválasztanunk, hogy x_1, x_2 és x_3 jelentse azt, hogy rendre az 1., 2. és 3. változatot hányszor alkalmazzuk a vágás során. Ekkor a változók nemnegatívak és csak egész értékeket vehetnek fel.

A feltételek felírása során először is abból indulunk ki, hogy 1000 oszlopunk van, tehát összesen pontosan 1000-szer fogunk darabolni, a darabolások száma pedig a változók összege, tehát $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$. A második feltétel felírásához fel kell írunk a darabolások száma alapján, hogy hány darab 2.5 méteres illetve 1.5 méteres oszlop áll elő. Minden alkalom, amikor az 1. változatot alkalmazzuk eredményez 2 darab 2.5 méteres oszlopot, tehát összesen az 1. változattól $2x_1$ darab 2.5 méteres oszlop keletkezik. Továbbá kapjuk, hogy a 2. változat alkalmazásából összesen x_2 darab 2.5 méteres oszlop áll elő, a 3. változat viszont nem ad 2.5 méteres oszlopot. Így összegezve a keletkező 2.5 méteres oszlopok száma $2x_1 + x_2$. Hasonlóan átgondolva a keletkező 1.5 méteres oszlopok száma $x_1 + 3x_2 + 4x_3$. Legalább négyszer annyi 1.5 méteres oszlop kell, mint 2.5 méteres, tehát

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 4 \cdot (2x_1 + x_2).$$

A célfüggvényben a keletkező hulladékot kell hasonló módon összeszámolnunk. Az 1. változat esetén minden alkalmazáskor 0.5 méter, a 3. változat esetén minden alkalmazáskor 1 méter hulladék keletkezik, tehát összesen $0.5x_1 + x_3$ méter hulladék áll elő.

Összegezve, a matematikai modell:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 4 \cdot (2x_1 + x_2)$$

$$z = 0.5x_1 + x_3 \rightarrow \min$$

- (8) Egy 30, egy 25 és egy 20 méter hosszúságú vashuzalt kell 6 méteres, 4 méteres és 3 méteres hosszúságú darabokra leszabni. A 6 méteres darabokból pontosan kétszer annyi kell, mint a 4 méteres darabokból és pontosan feleannyi, mint a 3 méteresekből. Írjuk fel a feladat matematikai modelljét, hogyan kell elvégezni a darabolást, ha célunk, hogy maximális számú huzal keletkezzen!

Megoldás: A feladat modelljében jelölje x_1, x_2 és x_3 a 30 méteres vashuzalból vágott 6, 4 illetve 3 méteres darabok számát; jelölje x_4, x_5 és x_6 a 25 méteres vashuzalból vágott 6, 4 illetve 3 méteres darabok számát; és jelölje x_7, x_8 és x_9 a 20 méteres vashuzalból vágott 6, 4 illetve 3 méteres darabok számát. Ezek a darabszámok természetesen csak nemnegatív egészek lehetnek.

A feltételek felírásához először is figyelembe kell vennünk a huzalok hosszúságát. Az első huzalból vágunk x_1 darab 6 méteres részt, ezek összhosszúsága $6x_1$, továbbá vágunk x_2 darab 4 méteres és x_3 darab 3 méteres részt, ezek összhosszúsága $4x_2$ és $3x_3$. Ha ezeket a kifejezéseket összeadjuk, akkor nyilván nem léphetjük túl a huzal teljes hosszát, a 30 métert. Ez adja az első feltételt. További két feltételt kapunk teljesen hasonló módon a második és a harmadik huzal hosszát figyelembe véve. A modellben ezeken kívül szerepel még két feltétel, melyek már a konkrét keletkező darabszámokra vonatkoznak. A célfüggvény pedig a keletkező huzalok számának összege lesz. Tehát a feladat matematikai modellje:

$$x_i \geq 0, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$6x_4 + 4x_5 + 3x_6 \leq 25$$

$$6x_7 + 4x_8 + 3x_9 \leq 20$$

$$x_1 + x_4 + x_7 = 2 \cdot (x_2 + x_5 + x_8)$$

$$2 \cdot (x_1 + x_4 + x_7) = x_3 + x_6 + x_9$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \rightarrow \max$$

(9) Négy részvény jelenlegi árfolyamai és a tőzsde 2 hónappal későbbi árfolyamelvárásai:

	Jelenlegi árfolyam (Ft/db)	Árfolyamelvárás (Ft/db)
A	13 800	16 600
B	14 600	15 500
C	2 800	3 100
D	3 800	4 200

Mindegyik részvényből legalább 500 000 Forint értékben vásárolunk a portfólió kialakításához. Összesen legfeljebb 4 millió Forintot költhetünk. Az **A** részvényből legfeljebb 100 darab vásárolható. A vásárlást követően minden részvényre azonnal limitáras eladási megbízást adunk az árfolyamelvárásokon. A brókeri jutalék vásárláskor a vételi ár, illetve eladáskor a bevétel 1 %-a. Ha minden eladási megbízás teljesül, milyen portfólió esetén lesz az elvárt hozam optimális? Adjuk meg a matematikai modellt!

Megoldás: A portfólió összeállításához azt kell meghatároznunk, hogy adott részvényből hány darabot vásároljunk. Tehát x_1, x_2, x_3 és x_4 jelölje rendre az **A, B, C** és **D** részvényekből vásárolt darabszámot. Ekkor mindegyik változó nemnegatív egész értékű.

A feltételeknél először azt gondoljuk át, hogy mindegyikből legalább 500 000 Forint értékben kell vásárolnunk. Az **A** részvény jelenlegi árfolyama 13 800 Forint/darab, tehát itt is kihasználhatjuk a feltétel linearitását, hiszen kétszer annyi részvényért kétszer akkora összeget fizetünk ki. Ezért x_1 darab **A** részvényre $13\,800x_1$ összeget fogunk költeni. Ugyanígy kapjuk a többi részvényre költött összeget is, és mindegyiknek el kell érnie az 500 000 Forintot. Az **A** részvényből legfeljebb 100 darab vásárolható, tehát azonnal adódik, hogy $x_1 \leq 100$.

Mivel összesen legfeljebb 4 millió Forintot költhetünk, össze kell számolni a teljes költséünket. A négy részvényre $13\,800x_1 + 14\,600x_2 + 2\,800x_3 + 3\,800x_4$ Forintot költöttünk összesen, azonban a kiadásunkba beletartozik a kifizetett jutalék is. Tehát ezt az összeget meg kell növelnünk 1 %-kal, ennyi lesz a teljes költségünk, ami nem lépheti túl a 4 milliót.

A célfüggvény felírásához először összeszámoljuk a bevételünket. Itt szintén a probléma linearitásából indulunk ki, kétszer annyi részvényt eladva kétszer akkora bevételhez jutunk. Így a bevételünk összesen $16\,600x_1 + 15\,500x_2 + 3\,100x_3 + 4\,200x_4$. Azonban ebből még ki kell fizetnünk a jutalékot, tehát ezt le kell csökkentenünk 1 %-kal, ennyi lesz a tényleges bevételünk. Ahhoz, hogy a hozamot megkapjuk, ebből még ki kell vonnunk a fentiekben

megadott teljes költséget. Összefoglalva tehát a matematikai modell:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

$$13\,800x_1 \geq 500\,000$$

$$14\,600x_2 \geq 500\,000$$

$$2\,800x_3 \geq 500\,000$$

$$3\,800x_4 \geq 500\,000$$

$$x_1 \leq 100$$

$$(13\,800x_1 + 14\,600x_2 + 2\,800x_3 + 3\,800x_4) \cdot 1.01 \leq 4\,000\,000$$

$$z = (16\,600x_1 + 15\,500x_2 + 3\,100x_3 + 4\,200x_4) \cdot 0.99 -$$

$$(13\,800x_1 + 14\,600x_2 + 2\,800x_3 + 3\,800x_4) \cdot 1.01 \rightarrow \max$$

- (10) Egy kórházban a hét napjain különböző számú nővérre van igény. A szükséges létszámot az alábbi táblázat mutatja:

Napok	H	K	Sz	Cs	P	Sz	V
Munkaerő-igény (fő)	16	15	17	18	14	12	10

Minden nővérnek négy napot kell egymás után dolgozni és utána három szabadnapot kap. Legalább hány nővért kell a kórháznak alkalmaznia? Írjuk fel a matematikai modellt!

Megoldás: Ebben a munkaerő-ütemezési feladatban is először a döntési változók felvételén kell elgondolkodnunk. A kérdés nyilván az optimális létszám meghatározása, tehát a változók a dolgozók számával lesznek kapcsolatban. Azonban a feltételek a hét napjaira vannak megadva, tehát nem tudjuk a létszámot egészében tekinteni, szét kell bontanunk a napokra, hogy a feltételrendszert meg tudjuk fogalmazni. Mivel minden nővér négy napot dolgozik egymás után, ha megmondjuk, hogy ki melyik napon kezdi ezt a négy napos sorozatot, meg tudjuk mondani, hogy melyik napokon fog dolgozni. Például hétfőn azok dolgoznak, akik az előző pénteken, szombaton, vasárnap vagy hétfőn kezdtek. Kedden azok dolgoznak, akik szombaton, vasárnap, hétfőn vagy kedden kezdtek, és így tovább. Ezekre a létszámokra pedig már felhasználhatjuk a táblázat adatait.

Tehát a modellhez értelmezzük a döntési változókat úgy, hogy x_i jelöli azon nővérek számát, akik a négy napot a hét i -edik napján kezdik, ahol $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ és az első nap hétfő. Ezek a változók ekkor természetesen nemnegatív egész értékeket vehetnek csak fel. Ekkor a változók segítségével kifejezve hétfőn $x_5 + x_6 + x_7 + x_1$ lesz a dolgozók száma (akik pénteken, szombaton, vasárnap illetve hétfőn kezdtek), ami nem lehet 16-nál kevesebb. Ugyanígy kifejezhetjük a kedden dolgozók számát, ami $x_6 + x_7 + x_1 + x_2$ lesz, ami pedig 15-nél nem lehet kevesebb. Hasonló gondolattal kapunk mind a hét napra egy feltételt. A

célfüggvény a dolgozók összlétszáma lesz, ami az összes változó összegével egyezik meg, hiszen minden dolgozó elkezd valamikor a négy napot, de senki sem kezd el többször. Tehát a feladat matematikai modellje:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{Z}$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 16$$

$$x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geq 15$$

$$x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geq 17$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 18$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 12$$

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 10$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \rightarrow \min$$

- (11) Egy megyében hat város van, amelyek közötti menetidőt (percben) az alábbi táblázatban adtuk meg:

	1	2	3	4	5	6
1	0	15	30	30	25	25
2	15	0	25	35	25	10
3	30	25	0	15	25	25
4	30	35	15	0	15	25
5	25	25	25	15	0	11
6	25	10	25	25	11	0

Mely városokban létesítsünk tűzoltó állomást, ha minimális számú állomással kell biztosítanunk, hogy minden város legalább egy állomástól legfeljebb 20 perc alatt elérhető legyen? Adjuk meg a matematikai modellt!

Megoldás: A probléma úgy is megfogalmazható, hogy minden város esetén el kell döntününk, hogy ott legyen-e állomás vagy ne. Matematikailag az ilyen igen-nem döntéseket úgy modellezhetjük, hogy az "igen" döntésnek az 1 értéket feleltetjük meg, a "nem" döntésnek a 0 értéket. Tehát a döntési változókat vegyük fel olyan módon, hogy $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ esetén

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik városban építünk állomást,} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Az ilyen speciális egészértékű változókat bináris (kétértékű) változóknak nevezzük.

A feltételeket a táblázat alapján kell megfogalmaznunk. Mivel az első város az első és a második városból érhető el 20 percen belül, ahhoz, hogy az első várost lefedjük, biztosan építenünk kell állomást az első vagy a második városban (de nem zárjuk ki azt sem, hogy mindkettőben). Tehát az első illetve a második városhoz tartozó két változó, x_1 és x_2

nem lehet egyszerre 0, mert ez azt jelentené, hogy egyik városban sem építünk. Lineáris feltételben csak összeadást és konstanssal való szorzást használhatunk, ezért az a feltétel, hogy a két változó egyszerre nem 0, pontosan akkor teljesül, ha $x_1 + x_2$ legalább 1. Hasonlóan gondolkodhatunk a második város esetén, a táblázat alapján ki kell zárunk azt az esetet, hogy az első, a második és a hatodik városban sem építünk. Ez akkor teljesül, ha az ezekhez a városokhoz tartozó változók, x_1, x_2 és x_6 összege, $x_1 + x_2 + x_6$ legalább 1. A többi város adatai alapján kapjuk meg a további feltételeket. A célfüggvény felírásához össze kell számolnunk, hány állomást építünk összesen. Mivel minden változó pontosan akkor 1, ha építünk állomást, és 0, ha nem, az épített állomások száma pontosan az összes változó összege lesz. Az ilyen típusú feladatokat szokás halmazlefedési feladatoknak is nevezni. Összefoglalva, a feladat matematikai modellje:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ bináris

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_6 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$$

$$x_2 + x_5 + x_6 \geq 1$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min$$

- (12) Egy cég öt különböző befektetési lehetőséget vizsgál. A pénzkiáramlások és nettó jelenértékek a következő táblázatban adóttak (millió euróban):

	1. bef.	2. bef.	3. bef.	4. bef.	5. bef.
0. időpontbeli készpénzkiáramlás	11	53	5	5	29
1. időpontbeli készpénzkiáramlás	3	6	5	1	34
Nettó jelenérték	13	16	16	14	39

A társaságnak 40 millió euró áll rendelkezésére befektetési célokra most (0. időpont), becslések szerint egy év múlva (1. időpont) lesz még 20 millió eurója befektetési célra. A 0. időpontban fennmaradó alapok már nem használhatóak fel az 1. időpontban. A társaság bármelyik befektetés bármilyen törtrészét is megvásárolhatja, ilyen esetben a pénzkiáramlások és a nettó jelenérték is megfelelő módon átszámítódnak. Adjuk meg a matematikai modellt, ha célunk, hogy a társaság maximalizálja a befektetésekből származó nettó jelenértéket!

Megoldás: A cégnek el kell döntenie, hogy az egyes befektetésekből mekkora részeket vásárol. Tehát a döntési változókat értelmezzük úgy, hogy x_i jelentse az i -edik befektetési lehetőségből a cég által megvásárolt hányadot, ahol $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ez a hányad természetesen valahova

0 és 1 közé fog esni, tehát olyan folytonos változót kell majd ebben az esetben használnunk, mely itt veszi fel az értékeit.

A feltételek esetén ismét kihasználható a linearitás, ugyanis ha például egy befektetésbe csak 50 %-ban száll be a cég, akkor a költött összeg is csak a megfelelő pénzáramlás 50 %-a. Tehát minden befektetés esetén úgy kapjuk meg a költött összeget, hogy a teljes pénzáramlást súlyozzuk a megvásárolt hányaddal, azaz a döntési változóval. Teljesen hasonlóan járhatunk el a nettó jelenérték esetén is, ami a célfüggvény lesz. Ez alapján a feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \\ 11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 &\leq 40 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5 &\leq 20 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_3 &\leq 1 \\ x_4 &\leq 1 \\ x_5 &\leq 1 \\ z = 13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Az ilyen típusú problémát szokás tőkeallokációs feladatnak nevezni. Sok esetben észszerűtlen azonban megengedni, hogy törtrészt is vásárolhassunk egy befektetésből, mert ebben az esetben a hozam nem arányosan adódna, vagy éppen semmilyen hozamot nem tudnánk megvalósítani. Ezért sokszor egy tőkeallokációs feladat során abban kell döntenünk, hogy beszállunk-e egy adott befektetésbe, vagy sem. Erre ad példát a következő feladat.

- (13) Négyféle befektetést vizsgálunk. A befektetések hozamának nettó jelenértéke rendre 16 000, 22 000, 12 000 és 8 000 euró. Az egyes befektetések jelenbeni készpénzigénye rendre 5 000, 7 000, 4 000 és 3 000 euró. Jelen pillanatban 14 000 euró készpénz a befektethető összeg. Írja fel a probléma matematikai modelljét, ha célunk, hogy maximalizáljuk a befektetések összhozamának nettó jelenértékét!

Megoldás: Ez egy olyan tőkeallokációs feladat, mely esetén a döntési lehetőségünk annyi, hogy egy adott befektetést kiválasztunk-e vagy sem. Ha kiválasztjuk, akkor úgy tekintjük, hogy 100 %-ban számítjuk a költséget és a hasznot is, ha nem választjuk ki, akkor úgy tekintjük, hogy 0 %-ban számítjuk a költséget és a hasznot. Ezek alapján értelmezzük a döntési változókat $i = 1, 2, 3, 4$ esetén a következő módon:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ha befektetünk az } i\text{-edik lehetőségbe,} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Tehát ismét bináris változókkal dolgozunk. A korlátozó feltételt a 14 000 euró befektethető összeg jelöli ki. A változók itt is tekinthetők aránynak attól függetlenül, hogy ez az arány csak 0 vagy 1, azaz 0 vagy 100 % lehet. Tehát a feltétel és a célfüggvény is az előző feladathoz teljesen hasonlóan adódik a linearitás felhasználásával. Az ilyen jellegű feladatot szokás hátizsák feladatnak is nevezni. Tehát a feladat modellje:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ bináris}$$

$$5000x_1 + 7000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \leq 14000$$

$$z = 16000x_1 + 22000x_2 + 12000x_3 + 8000x_4 \rightarrow \max$$

- (14) Háromféle ruhadarabot gyártunk: ingeket, pulóvereket és nadrágokat. Mindegyik ruhaféle gyártásához speciális gépek kellenek, ezeket a cég bérli. A heti bérleti díj 200 euró az ingekhez használt gép, 150 euró a pulóverekhez használt gép és 100 euró a nadrágokhoz használt gép esetén. Az egyes ruhadarabok gyártásához ing esetén 3 óra munka és 4 m² szövet, pulóver esetén 2 óra munka és 3 m² szövet, nadrág esetén 6 óra munka és 4 m² szövet szükséges. Hetente 150 óra élőmunka és 160 m² szövet áll rendelkezésre. A darabonkénti eladási ár a termékekre rendre 12, 8 és 15 euró, a változó költségek pedig darabonként rendre 6, 4 és 8 euró. Milyen gyártás esetén lesz a cég heti profitja maximális! Adjuk meg a matematikai modellt!

Megoldás: Az ilyen típusú feladatot fixköltség problémának nevezzük. A döntési változók felvételét két részre bontjuk. Először is, jelölje x_1, x_2 és x_3 a szokásos módon rendre a gyártandó mennyiségeket. Ezek a változók nyilván nemnegatív egészek. Másodszor, a problémában azt is el kell döntenünk, hogy egy adott terméket egyáltalán gyártsunk-e vagy sem, hiszen a gépek bérleti díját csak akkor fizetjük ki, ha a megfelelő terméket gyártjuk. Tehát szükségünk lesz három bináris változóra rendre a három igen-nem döntés reprezentálására, $i = 1, 2, 3$ esetén legyen

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{ha gyártjuk az } i\text{-edik terméket,} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Ekkor először vizsgáljuk meg a következő modellt:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

$$y_1, y_2, y_3 \text{ bináris}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150$$

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160$$

$$z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3 \rightarrow \max$$

Ez azonban még nem teljes, ki kell egészítenünk a modellt úgy, hogy tartalmazzon olyan feltételeket, hogy az $y_i = 0$ feltételből következzen az, hogy $x_i = 0$, továbbá ha $y_i = 1$,

akkor abból ne következzen felesleges korlátozás a megfelelő x_i értékre. Az ilyen ”ha-akkor” döntések matematikai leírására egy módszer, hogy kiegészítjük a modellt a következőkkel:

$$x_1 \leq M_1 y_1$$

$$x_2 \leq M_2 y_2$$

$$x_3 \leq M_3 y_3$$

Ezek már garantálják, hogy ha az y_i változó 0, akkor a megfelelő x_i változó is 0 lesz.

Nézzük meg, hogyan kell megválasztani az M_i értékeket, hogy ezek az új feltételek ne jelentsenek indokolatlan korlátokat a gyártandó mennyiségekre. Az eredeti technológiai feltételek alapján, ha a teljes első erőforrást, a munkaórát az első termék, azaz az ingek gyártására fordítjuk, akkor legfeljebb 50 inget tudunk gyártani. Ha a teljes második erőforrást, a szövetet az első termék gyártására fordítjuk, akkor legfeljebb 40 inget tudunk gyártani. Ezt tekinthetjük úgy, hogy az ingek gyártása esetén a szövet a szűk keresztmetszet. Tehát ha M_1 -et legalább 40-nek választjuk, akkor az első új feltétel nem jelent semmilyen felesleges korlátot az ingek gyártandó mennyiségére, hiszen ha $y_1 = 1$, akkor a feltétel $x_1 \leq M_1$ alakú lesz, és 40-nél többet a szövet-feltétel miatt amúgy sem gyárthatnánk. Tehát ez alapján $M_1 \geq 40$.

Gondoljuk át ugyanilyen módon M_2 értékét. Ha a második termékre, a pulóverre fordítjuk az összes munkaórát, akkor legfeljebb 75-öt gyárthatunk, ha pulóverre fordítjuk az összes szövetet, akkor legfeljebb 53-at gyárthatunk. Tehát a pulóver gyártása során is a szövet a szűk keresztmetszet, ebből következően $M_2 \geq 53$. Ha a harmadik termékre, a nadrágra fordítjuk az összes munkaórát, legfeljebb 25 nadrágot gyárthatunk, ha nadrág gyártására fordítjuk az összes szövetet, akkor legfeljebb 40 nadrágot gyárthatunk. Tehát a nadrág esetén a munkaóra a szűk keresztmetszet, ebből következően $M_3 \geq 25$. Ezzel a három plusz feltétellel kapjuk meg tehát a feladat helyes modelljét, melyet a 2. fejezetben meg is oldunk.

- (15) Egy cégnél a havi összes bér 14.6 millió Forint, amit szeretnének 10 millióra csökkenteni. A dolgozókat 4 bérkategóriában foglalkoztatják. A kategóriákban az átlagbér és a dolgozók száma:

	Átlagbér (eFt)	Dolgozók száma
A	80	50
B	100	40
C	120	30
D	150	20

Létszámcsökkentés után az **A** és **B** kategóriákban 20 %-kal, a **C** és **D** kategóriákban 10 %-kal emelik a béreket. Az **A** kategóriában legfeljebb kétszer annyi dolgozóra van szükség, mint **B**-ben. A **C** kategóriában legalább 14, a **D**-ben legalább 6, de legfeljebb 12 dolgozót kell

alkalmazni. Hogyan valósítsák meg a létszámalakítást, hogy a lehető legkevesebb embert kelljen elküldeni? Adjuk meg a matematikai modellt!

Megoldás: Válasszuk döntési változóknak az egyes bérkategóriákban elbocsátottak számát! Ekkor az x_1, x_2, x_3 és x_4 változók nyilván nemnegatív egészek. Az **A** kategóriában így $50 - x_1$ dolgozó marad, a **B** kategóriában $40 - x_2$, a **C**-ben $30 - x_3$ és a **D**-ben $20 - x_4$. Ezek alapján írjuk fel a modell első négy korlátozó feltételét. Az ötödik feltétel pedig abból származik, hogy a létszám-átalakítás után a megnövelt bérekkel számolva a bérkeret nem haladhatja meg a 10 millió Forintot. A célunk az, hogy az elbocsátottak száma a lehető legkevesebb legyen. Tehát a feladat matematikai modellje:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

$$50 - x_1 \leq 2 \cdot (40 - x_2)$$

$$30 - x_3 \geq 14$$

$$20 - x_4 \geq 6$$

$$20 - x_4 \leq 12$$

$$(50 - x_1) \cdot 96000 + (40 - x_2) \cdot 120000 + (30 - x_3) \cdot 132000 + (20 - x_4) \cdot 165000 \leq 10000000$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min$$